1993年　東大数学　文系 第4問

(与式) ⟺ $t=-x^4+2x^2+1$ として、定数分離

$y=t$ と $y=-x^4+2x^2+1$ $(=f(x)$ とおく$)$ の交点を考える

$y=f(x)$ のグラフを描くと、

$f'(x)=-4x^3+4x$

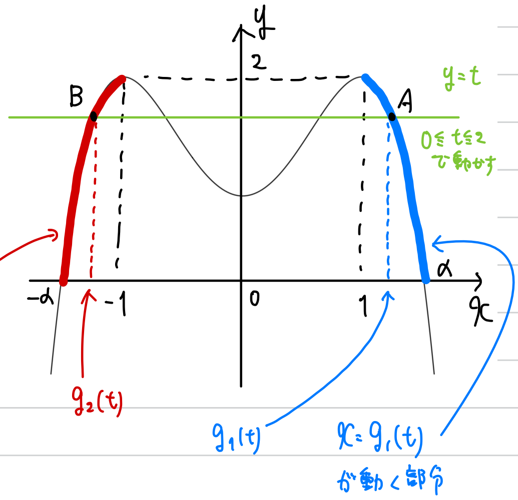
$\quad=-4x(x^2-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘

よって、グラフは右下のようになり、$y=t$との交点を考えると、$x=g_2(t)$　$x=g_1(t)$ がわかる

但し、αの値は、$-x^4+2x^2+1=0$ を解き

$\alpha=\sqrt{1+\sqrt{2}}$

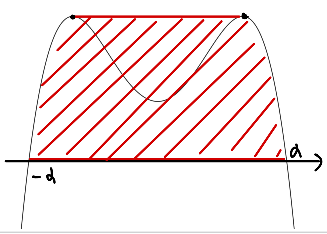


ここで

$g_1(t)-g_2(t)$ は図の線分ABを表すため、

$\int_0^2\{g_1(t)-g_2(t)\}dt$ は

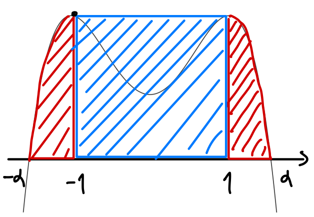
右図の部分の面積を表す



右のように、分割すると、

 $=\int_1^\alpha f(x)\,dx$

 $=2\times2=4$ なので、



求める面積は

$$2\times\int_1^\alpha f(x)\,dx+4$$

$$=2\int_1^\alpha(-x^4+2x^2+1)\,dx+4$$

$$=2\times\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right]_1^\alpha+4$$

$$=2\times\left\{-\frac{1}{5}(\alpha^5-1)+\frac{2}{3}(\alpha^3-1)+(\alpha-1)\right\}+4$$

$$=-\frac{2}{5}\alpha^5+\frac{4}{3}\alpha^3+2\alpha+\frac{16}{15}$$

($\alpha=\sqrt{1+\sqrt{2}}$　$-\alpha^4+2\alpha^2+1=0$ から

$\alpha^2=1+\sqrt{2}$　$\alpha^4=2\alpha^2+1$

$\quad=2(\sqrt{2}+1)+1$

$\quad=2\sqrt{2}+3$ なので)

$$=\frac{16}{15}+\frac{8}{15}(4+\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}}$$